پاسخ تشریحی کوییز شماره ی ۸

ریاضی عمومی ۱و۲

استاد شکرزاد

تست ۱ (۳)

ابتدا عبارت را با کمک فرمول توان شکل مثلثاتی ساده می‌کنیم.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(1-\underbrace{\cos \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\operatorname{Arccos} x^2\right)}_{x^2}\right) = \frac{1}{2}(1-x^2)$$

حال مشتق عبارت ساده شده به راحتی محاسبه می‌کنیم و نقطه $x_0=\frac{1}{2}$ را در آن لحاظ می‌کنیم.

$$y' = \frac{1}{2}(-2x) = -x \Rightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

تست ۲ (۳)

یکی از شیوه‌های محاسبه مشتقات مراتب بالا برای توابع جبری استفاده از سری مک لورن آن‌ها است.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$f(x) = \frac{\cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\right)}{x^2} \sim \frac{x}{6} - \frac{x^3}{120} + \cdots$$

$$\Rightarrow f'''(x) = 0 - \frac{3!}{120} + \cdots \Rightarrow f'''(0) = -\frac{3!}{120} = -\frac{6}{120} = -\frac{1}{20}$$

تست ۳ (۳)

شرط پیوستگی: $\overbrace{f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)}^{\text{یکی هستند}} = \lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow \cancel{\ln 1}^{\,0} = 1+b \Rightarrow b=-1$

شرط برابری شاخه‌های مشتق: $f'_+(0) = f'_-(0) \Rightarrow \frac{a}{ax+1} = 2e^{2x}\Big|_{x=0} \Rightarrow a=2$

تست ۴

(۴)

مشتق ضمنی مرتبه اول : $x'_y = \frac{dx}{dy} = -\frac{f_y}{f_x} = -\frac{2xy+1}{y^2-2x}\Big|_{(1,2)} = -\frac{5}{2}$

مشتق دوم با رویکرد x تابعی از y : $x''_{yy} = -\frac{(2x'y+2x)(y^2-2x)-(2y-2x')(2xy+1)}{(y^2-2x)^2}\Big|_{\substack{x=1\\y=2\\x'=-\frac{5}{2}}}$

$$\Rightarrow x''_{yy} = -\frac{\left(2(-\frac{5}{2})(2)+2(1)\right)\left((2)^2-2\right)-\left(2(2)-2(-\frac{5}{2})\right)\left(2(1)(2)+1\right)}{(2^2-2)^2}$$

$$\Rightarrow x''_{yy}(1,2) = -\frac{-16-45}{4} = -\frac{61}{4}$$

تست ۵

(۲)

ابتدا برای ساده کردن عبارت از طرفین تابع لگاریتم می‌گیریم.

$$\xrightarrow{\ln \text{ طرفین}} \ln y = \ln x \ln(\ln x) \xrightarrow{\text{مشتق طرفین}} \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\ln(\ln x) + \cancel{\ln x}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\cancel{\ln x}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\left(\ln(\ln x)+1\right) \Rightarrow \boxed{y' = \frac{y}{x}\left(1+\ln(\ln x)\right)}$$